

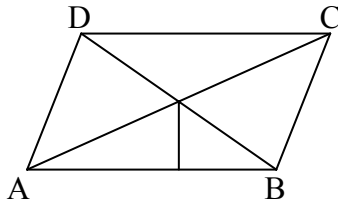
בחינת מחצית א' במתמטיקה מועד ב'

הנחיות לנבחנים

- א. משך הבחינה 3 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של הבחינה.
 ב. רשמו את שם כיתת האם על המחברת.
 ג. פתרו את כל השאלות.
 ד. פתרו את השאלות 1,6 באמצעות גיאומטריה המישור (ללא שימוש בטריגונומטריה). מומלץ להשתמש בכלי שרטוט.

שאלה 1 - 12%

במקבילית ABCD זווית $\angle A = 60^\circ$ והאלכסון $BD = 2\sqrt{31}$.



המרחק מנקודת חיתוך האלכסונים לצלע הגדולה שווה ל- $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

- א. (6%) מצאו את אורך צלעות המקבילית.
 ב. (6%) מצאו את אורך האלכסון השני של המקבילית.

שאלה 2 - 16%

נתונה משוואה $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$

- א. (8%) הוכיחו שאין m כזה שעבורו שורשי המשוואה הממשיים הם חיוביים ומקיימים $x_1^2 + x_2^2 < 1$
 ב. (8%) עבור אילו ערכים של m למשוואה אין פתרון ממשי.

שאלה 3 - 20%

- א. (10%) בסדרה חשבונית a_1, a_2, \dots נתון $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$
 חשבו סכום 19 האיברים הראשונים בסדרה.

ב. (10%) פתרו את אי השוויון: $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) > 2$

שאלה 4 - 12%

א. (6%) פתרו את אי השוויון: $3^{\log_3(x) + \log_3(x^2) + \log_3(x^3) + \dots + \log_3(x^8)} \leq 27x^{30}$

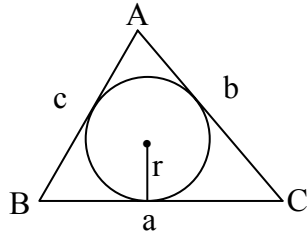
ב. (6%) פתרו את אי השוויון: $\frac{(x^2 - 9)^3 (x^2 - 3|x| - 4) \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{(x+2)^2 (x-1)} \leq 0$

שאלה 5 - 20%

א. (10%) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

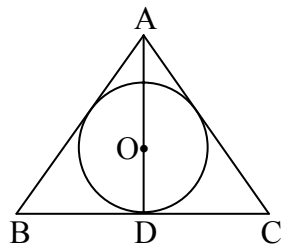
ב. (10%) הוכיחו כי לכל n טבעי אי זוגי הביטוי: $12^n + 5^n + 2^{n+1}$ מתחלק ב-7 ללא שארית.



שאלה 6 - 20%

א. (10%) הוכיחו: שטח המשולש שווה לרדיוס המעגל

החסום במשולש כפול מחצית היקף המשולש.



ב. (10%) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום מעגל

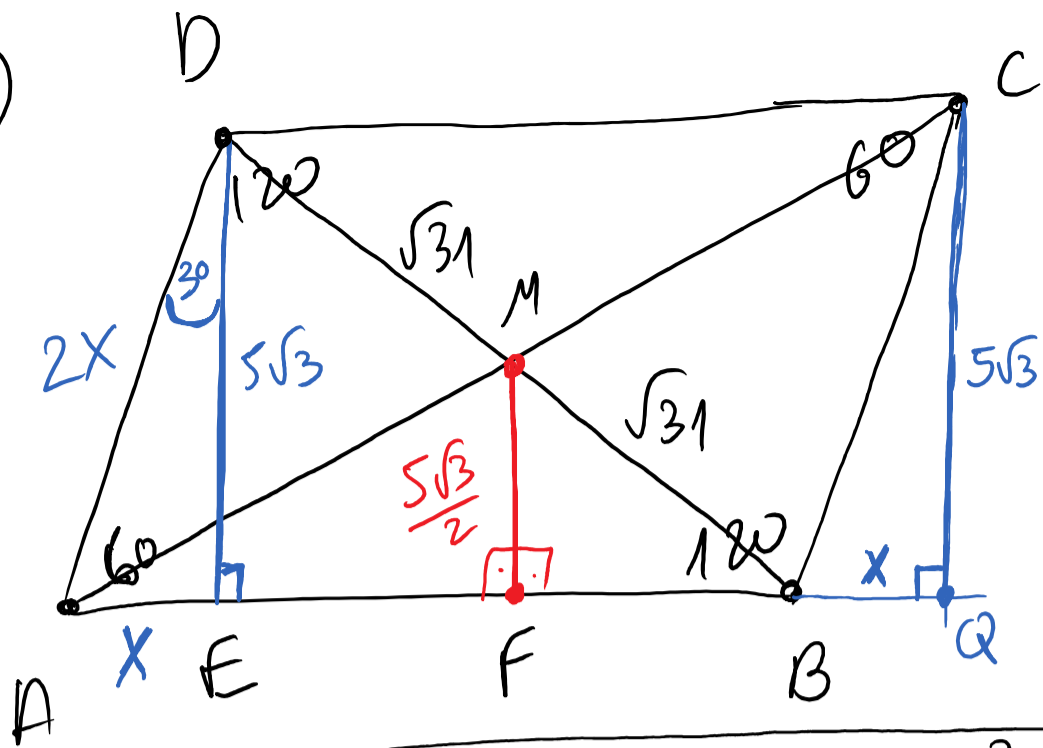
שמרכזו O. המרכז O מחלק את הגובה לבסיס

לשני קטעים שאורכם $AO=5$ ו- $OD=3$.

חשבו את צלעות המשולש.

בהצלחה

1



$\triangle DEB$: $(5\sqrt{3})^2 + EB^2 = (2\sqrt{31})^2$
 01/21/10
 $75 + EB^2 = 124$

$EB^2 = 49$

$EB = 7 \Rightarrow AB = 5 + 7$

$AB = 12$
 $DC = 12$

1c

$\triangle DAE$ (30, 60, 90)

$AE = X$

$AD = 2X$

01/21/10

$X^2 + (5\sqrt{3})^2 = (2X)^2$

$X^2 + 75 = 4X^2$

$75 = 3X^2$

$25 = X^2$

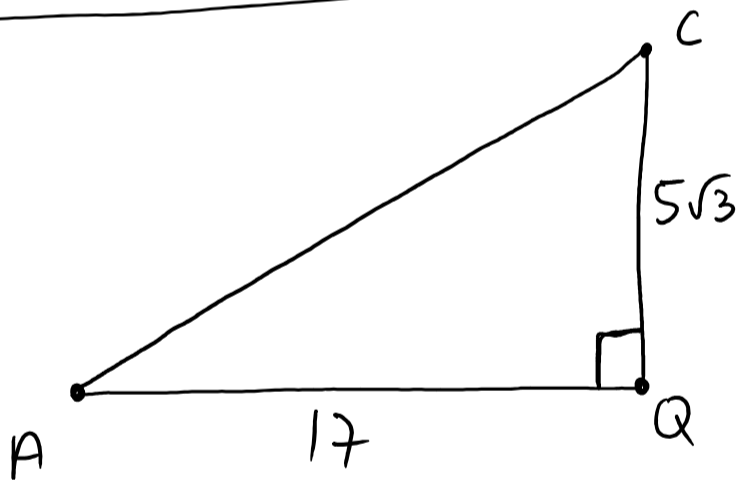
$X = 5$

\Rightarrow

$AD = 10$

$BC = 10$

2



$AC^2 = 17^2 + (5\sqrt{3})^2$

$AC^2 = 289 + 75$

$AC^2 = 364$

\Rightarrow

$AC = \sqrt{364} = 2\sqrt{91}$

2) $(m+3)x^2 + mx + 1 = 0$

פ' וריב
פ' וריב

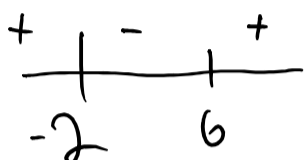
$m \neq -3$

(כ) $\Delta \geq 0$ $-\frac{b}{a} > 0$ $\frac{c}{a} > 0$

$m^2 - 4(m+3) \geq 0$

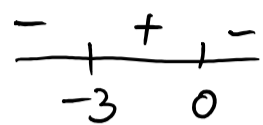
$m^2 - 4m - 12 \geq 0$

$(m-6)(m+2) \geq 0$



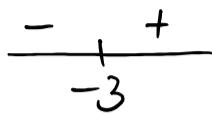
$m \geq 6$
 $m \leq -2$

$-\frac{m}{m+3} > 0$



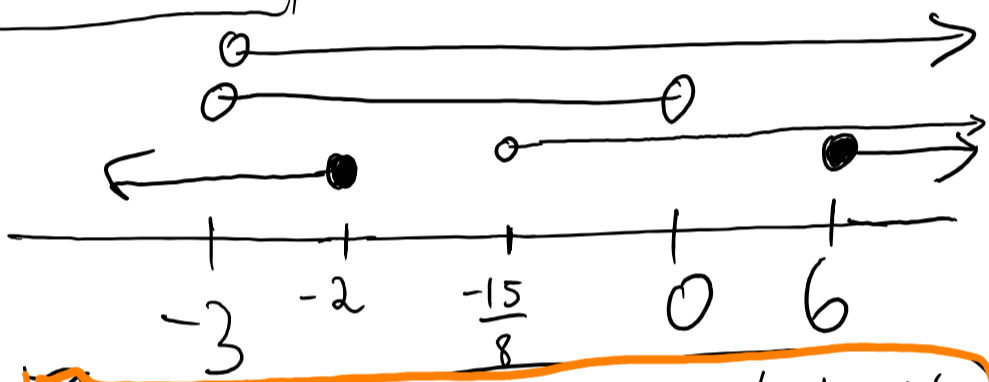
$-3 < m < 0$

$\frac{1}{m+3} > 0$



$m > -3$

סך הכל נקודות הפיתרון:
פ' וריב



$m < -2$ ו $-\frac{15}{8} < m < 6$

$x_1^2 + x_2^2 < 1$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 1$

$(-\frac{b}{a})^2 - 2(\frac{c}{a}) < 1$

$\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} < 1 \quad / \cdot a^2$

$b^2 - 2ac < a^2$

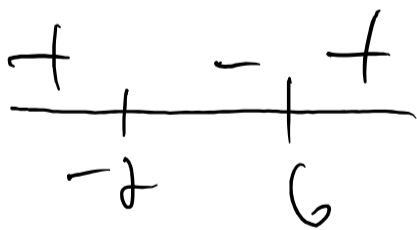
$m^2 - 2 \cdot (m+3) < (m+3)^2$

$m^2 - 2m - 6 < m^2 + 6m + 9$

$-15 < 8m$

$-\frac{15}{8} < m$

2) $\Delta < 0$
 $a \neq 0$ ($m \neq -3$)



$-2 < m < 6$

נקודות הפיתרון + a = 0

$m = -3$

$-3x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$

פ' וריב

$$(3) a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$$

$$(1c) a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 11d + a_1 + 15d = 224$$

$$4a_1 + 36d = 224$$

$$a_1 + 9d = 56$$

$$\frac{19}{2} (a_1 + a_{19}) =$$

$$\frac{19}{2} (a_1 + a_1 + 18d)$$

$$\frac{19}{2} (2a_1 + 18d) =$$

$$19(a_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = \boxed{1064}$$

$$(7) \log_{3x+7} (5x+3) + \log_{5x+3} (3x+7) > 2$$

$$\frac{\log_{5x+3} (5x+3)}{\log_{5x+3} (3x+7)} + \log_{5x+3} (3x+7) > 2$$

$$\frac{1}{w} + w - 2 > 0$$

$$\frac{w^2 - 2w + 1}{w} > 0$$

$$\frac{(w-1)^2}{w} > 0$$

$$= \frac{+}{0} + \frac{+}{1}$$

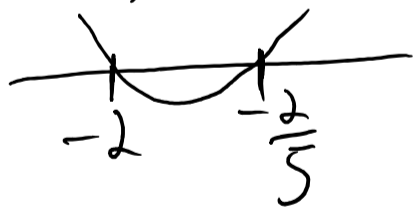
$$w > 0 \quad w \neq 1$$

$$\log_{5x+3} (3x+7) > 0$$

$$\log_{5x+3} (3x+7) > \log_{5x+3} 1$$

$$(5x+3-1)(3x+7-1) > 0$$

$$(5x+2)(3x+6) > 0$$



$$1c \quad x > -\frac{2}{5}$$

$$x < -2$$

$$\log_{5x+3} 3x+7 \neq 1$$

$$\log_{5x+3} 3x+7 \neq \log_{5x+3} 5x+3$$

$$(5x+3-1)(3x+7-5x-3) \neq 0$$

$$(5x+2)(4-2x) \neq 0$$

$$\boxed{x \neq -\frac{2}{5}}$$

$$\boxed{x \neq 2}$$

$$3x+7 > 0 \rightarrow x > -\frac{7}{3}$$

$$3x+7 \neq 1 \rightarrow x \neq -2$$

$$5x+3 > 0 \rightarrow x > -\frac{3}{5}$$

$$5x+3 \neq 1 \rightarrow x \neq -\frac{2}{5}$$

$$x > -\frac{3}{5}, \quad x \neq -\frac{2}{5}$$

$$\boxed{x \neq 2, \quad x > -\frac{2}{5} \quad : \text{در نظر بنویسید}}$$

4
1c

$$3^{\log_3 x} + 3^{\log_3 x^2} + \dots + 3^{\log_3 x^8} \leq 27x^{30} \quad x > 0$$

$$3^{\log_3 x} \cdot 3^{\log_3 x^2} \cdot \dots \cdot 3^{\log_3 x^8} \leq 27x^{30}$$

$$x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^8 \leq 27x^{30}$$

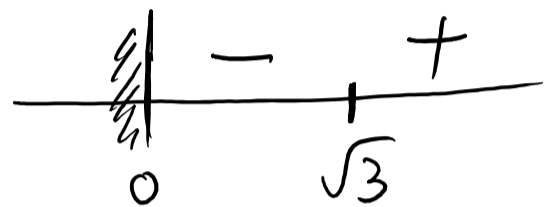
$$x^{1+2+3+\dots+8} \leq 27x^{30}$$

$$x^{\frac{8}{2}(1+8)} \leq 27x^{30}$$

$$x^{36} - 27x^{30} \leq 0$$

$$x^{30}(x^6 - 27) \leq 0$$

$$x=0 \quad x = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$$



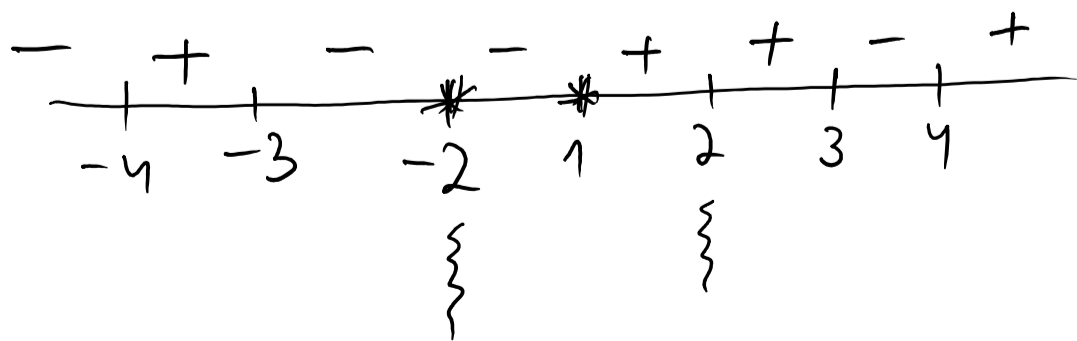
$$0 < x \leq \sqrt{3}$$

$$\frac{(x^2-9)^3 (x^2-3|x|-4) \sqrt{x^2-4x+4}}{(x+2)^2 (x-1)} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)^3 (x+3)^3 (|x|-4) (|x|+1) |x-2|}{(x+2)^2 (x-1)} \leq 0$$

3/27
2/11

$x=3$ $x=-3$ $x=4$ $x=2$ $x \neq -2$ $x \neq 1$
 $x=-4$



$$3 \leq x \leq 4$$

$$x=2$$

$$-2 < x < 1$$

$$-3 \leq x < -2$$

$$x \leq -4$$

5)
$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)}_{A \text{ / NOJ}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)}_{B \text{ / NOJ}}$$

$n=1$ $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \stackrel{??}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$ בדיקה:
 $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \checkmark$

נניח כי הטענה נכונה עבור n סכום כלשהו.
 נניח כי הטענה נכונה עבור האינדקס הקודם, עבור $n+1$.

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)}_{A} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$A + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$

על ידי הנחתה מקוטעים

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{4(n+1)} \quad / \cdot 2(2n+1)$$

$2 - 1 = 1$
 $1 = 1$ f.e.N

6)
$$\frac{12^n + 5^n + 2^{n+1}}{7}$$

$n=1$ $\frac{12+5+4}{7} = \frac{21}{7} = 3$ בדיקה??

נניח כי הטענה נכונה עבור n אי שוויון כלשהו.
 נניח כי הטענה נכונה עבור האינדקס הקודם, האינדקס $n+1$.

$$12^{n+2} + 5^{n+2} + 2^{n+3}$$

$$144 \cdot 12^n + 25 \cdot 5^n + 4 \cdot 2^{n+1}$$

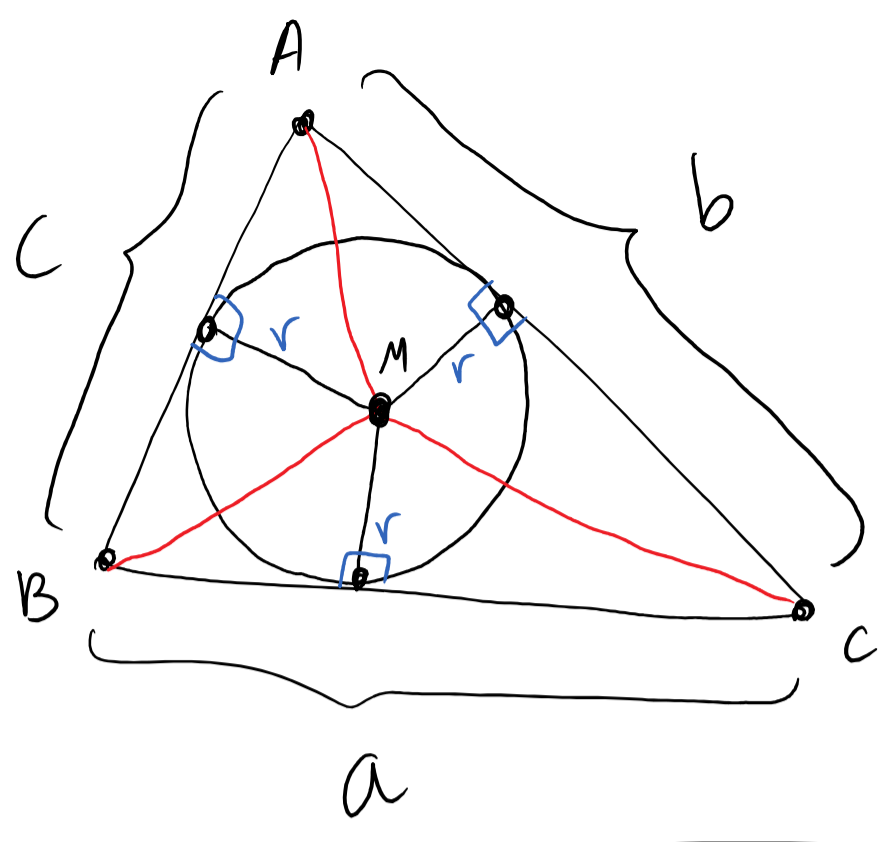
$$4(12^n + 5^n + 2^{n+1}) + (140 \cdot 12^n + 21 \cdot 5^n)$$

pfe ההנחה מחלקן 7-2 מחלקן 7-2

pfe 18 > 0 12 > 0

f.e.N . p f e

(6)
(k)



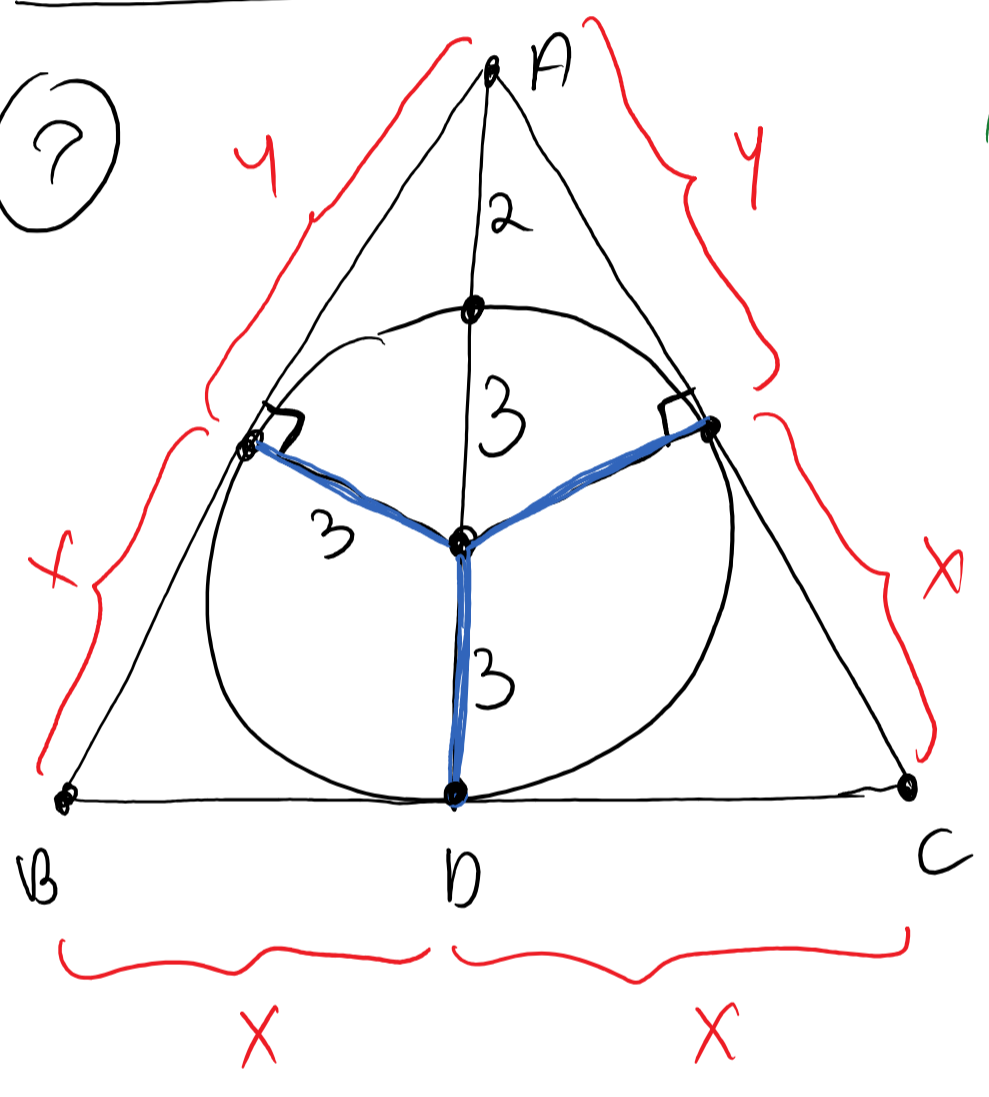
$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} + S_{BMC}$$

$$S = \frac{rc}{2} + \frac{rb}{2} + \frac{ra}{2}$$

$$S = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$$

S, r, N

(7)



$$\frac{(2+3+3) \cdot 2x}{2} = 3 \cdot \left(\frac{4+x+4+x+2x}{2} \right)$$

$$16x = 3(8+4x)$$

$$4x = 24$$

$$x = 6$$

$$AB = AC = 10$$

$$BC = 12$$

(L.H)

(K) $\{5 \text{ אדרע}\}$

ה'א'ה
כ'ח
:ה'א'ה

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-2}} - \frac{1}{4^n}) =$$

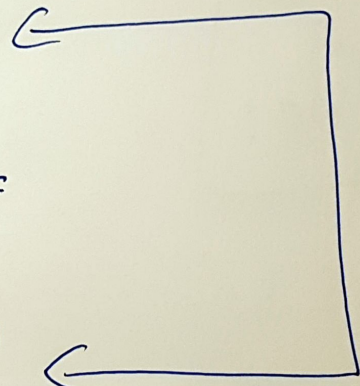
$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{4^{n-2} - 2^{2n-1}}{(2^{n-1})(4^{n-2})} - \frac{1}{4^n})$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{2^{2n-1}}{(2^{n-1})(4^{n-2})} - \frac{1}{4^n})$$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{4^{n-2}} - \frac{1}{4^n})$$

(R.H) $\frac{1}{2} \left((1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}) \right) =$

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{4^{n-2}} - \frac{1}{4^n})$$



R.H = L.H

f.e.v

Ⓟ 15 נוסע

$$\frac{12^n + 5^n + 2^{n+1}}{7}$$

$$n = 2k+1 \quad (25k)$$

$$\underbrace{\frac{12^n - 5^n}{12 - 5}}_{pfe} + \frac{2 \cdot 5^n + 2^{n+1}}{7}$$

$$\frac{2 \cdot (5^{2k+1} + 2^{2k+1})}{7}$$

$$\frac{2 \cdot (5^{2k+1} + 2^{2k+1})}{5+2}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{pfe}$$

$$\frac{A^n - B^n}{A - B} = pfe$$

$$\frac{A^{2k+1} + B^{2k+1}}{A + B} = pfe$$

ה/תה עמא
אינעקוואל: